Réseaux électriques linéaires en régime permanent

L'objectif de ce chapitre est de déterminer

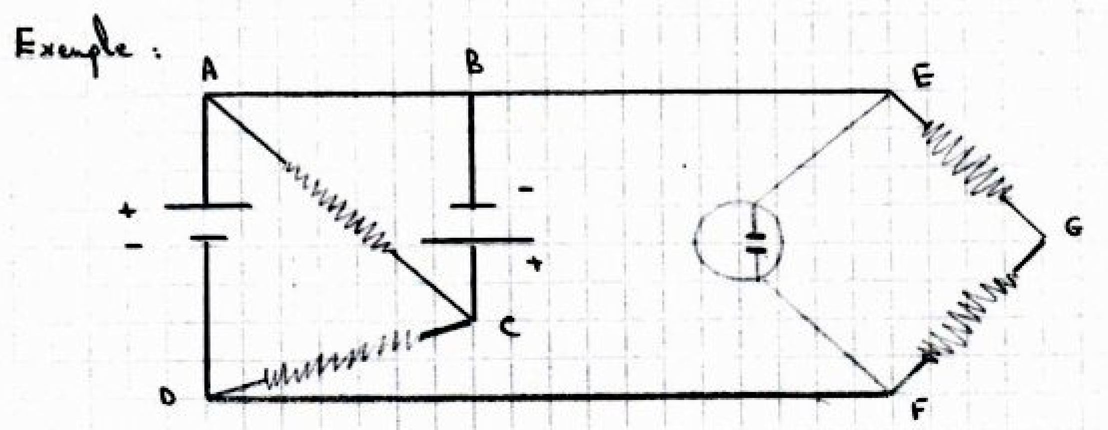
(en grandeur et de

Dans chaque branche d'un réseau électrique, pour cela nous étudierons plusieurs méthodes.

I - Les réseaux des conducteurs :

1 - Définition : On appelle réseau un circuit électique ou ensemble de circuit, c-à-d un ensemble d'appareil (générateur, récepteur, resistance ...) reliés entre eux par des conducteurs filiformes.

Exemple :



On appelle noeud le point de jonction d'au moins 3 conducteurs (les point A, B, C, D, E et F sont des noeuds) par contre G n'est pas un noeud. On appelle branche toute portion du circuit de comportant aucun noeud, c-à-d qui relie 2 noeuds. (Les branche du circuit de l'ensemble sont AD ; AC ; CD ; EF ; (E G n'est pas une branche)

On appelle maille toute boucle formée de branche (dans le cas de l'exemple ACD, ABC, ABCD, BEFD, EGF, ~~AEF~~ AEFD ....

2 - Lois de Kirchhoff : Ces lois ont pour but de permettre l'étude complète d'un circuit, c-à-d de déterminer les DDP au borne du différents appareils et les courants qu'ils traversent.

a - Loi des noeuds : cette loi traduit le faite qu'il ne peut y avoir d'accumulation d'électricité dans un noeud. loi des noeuds : La somme des intensité des courants qui converge vers un noeude qui égale à la somme des courants



qui ont impactent. Le nombre d'équation est égale à la nombre des nœuds.

$$\sum_{k=1}^{n} \pm i_k = 0$$

Exemple :

$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$

ou bien $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$

On affecte les courants orientés vers le nœud d'un signe (+), et on affecte les courants sortant d'un nœud d'un signe (-)

b - Loi des mailles : La somme des DDP aux borne des différents appareils rencontré lorsqu'on parcourt une maille dans un sens choisi est nulle. considérons une maille ABCD d'un réseau quelconque. La loi des mailles permet d'écrire :

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_A) = 0$$

- Dans le cas d'une maille contenant des générateurs, des récepteurs et des résistances, on peut écrire que : $\sum RI = \sum E$ avec les conventions de signe suivante : on adopte d'une façon arbitraire (au hasard) un sens de parcourt positif pour la maille.

- Les intensités sont prise avec le signe (+) pour les courants qui circule dans le sens du parcourt, et avec le signe (-) dans le cas contraire.

- On affecte la tension U_i d'un signal (+) si le sens de U_i correspond au sens positif de la maille, et on affecte (-) si son sens est opposée au sens positif de la maille.

- Les FEM et les FCEM sont affectés du signe du dernier pôle rencontré dans le sens du parcours.

Exemple :

sens arbitraire

$$\sum_{k=1}^{n} \pm U_k = 0$$

$$U_2 - U_3 - U_4 - U_1 = 0$$

3 - Transformation de Kennely :

Le théorème de Kennely permet la transformation d'un montage de dipôl

de type étoile en montage de type triangle et vice vers ça, ce théorème est ~~dite~~ utile dans le cas où l'on souhaite simplifier des schémas.

a – Passage du montage triangle au montage étoile :

Soit un triangle ABC équivalent à une étoile ABC

I_3 C R_3 R_2 A B I_1 R_1 I_2 ≡ C I_3 r_3 r_1 O r_2 A B I_1 I_2

O étant le centre du triangle Alors :

$$r_1 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad r_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad r_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

b – Passage du montage étoile au montage triangle :

A B R_{an} N R_{bn} R_{cn} C ≡ A B R_{ab} R_{ac} R_{cb} C

$$R_{ab} = \frac{R_{an} R_{bn} + R_{an} R_{cn} + R_{bn} R_{cn}}{R_{cn}}$$

$$R_{ca} = \frac{R_{an} R_{bn} + R_{an} R_{cn} + R_{bn} R_{cn}}{R_{bn}}$$

$$R_{bc} = \frac{R_{an} R_{bn} + R_{an} R_{cn} + R_{bn} R_{cn}}{R_{an}}$$

C – Exemple :

calculer I avec :

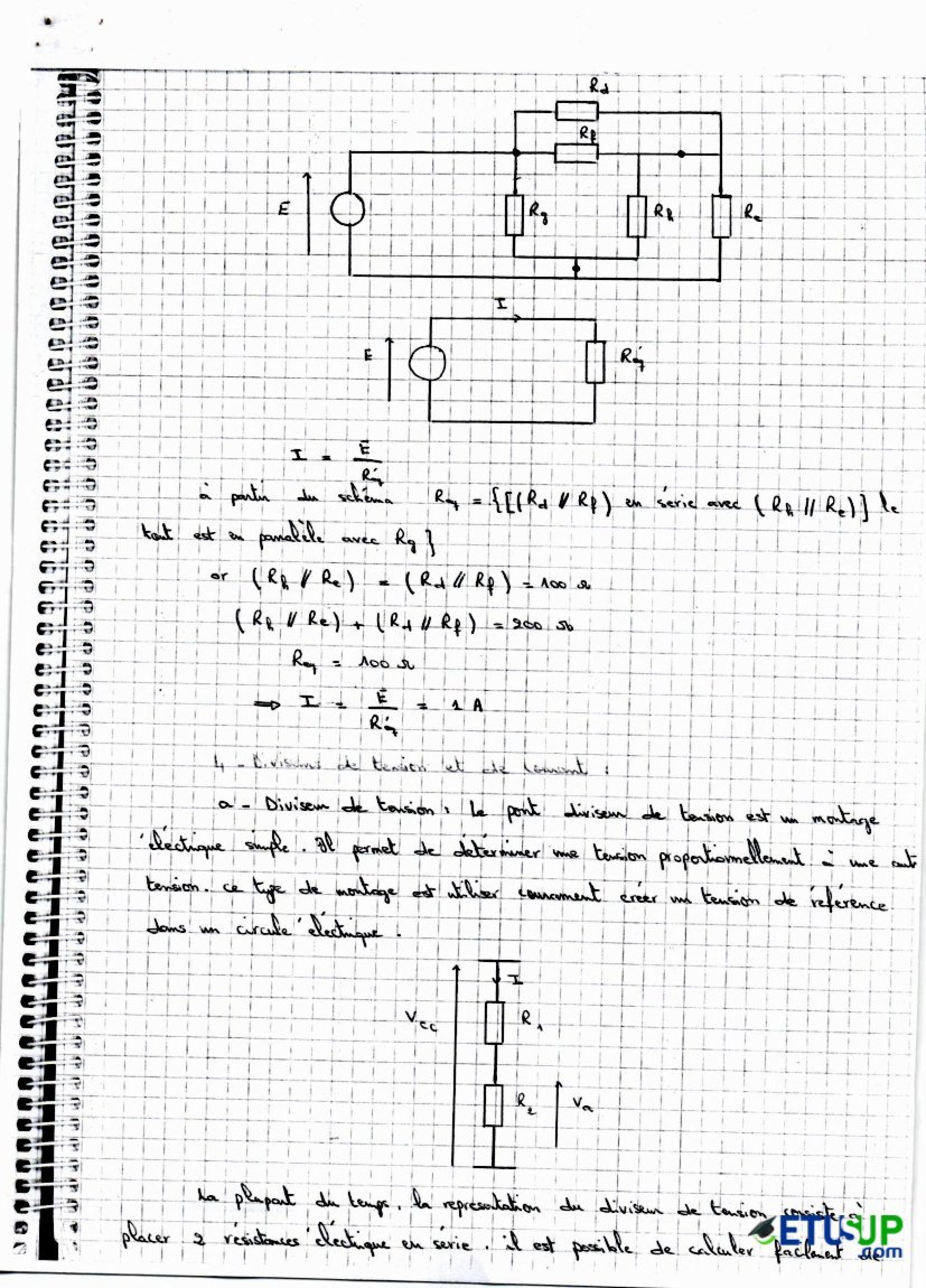
$E = 100\,V$

$R_a = 66{,}6\,\Omega = R_c = R_b$

$R_d = 200\,\Omega = R_e$

R_d I R_c E R_a R_b R_e

nous allons simplifier le schéma en remplaçant l'étoile $(R_a).(R_b).(R_c)$ par un triangle (R_F). (R_G) et (R_H) tel que $R_F = R_G = R_H$



$$I = \frac{E}{R'_{eq}}$$

à partir du schéma $R_{eq} = \{[(R_d \,//\, R_f)$ en série avec $(R_h \,//\, R_e)]$ le tout est en parallèle avec $R_g\}$

or $(R_h \,//\, R_e) = (R_d \,//\, R_f) = 100\ \Omega$

$(R_h \,//\, R_e) + (R_d \,//\, R_f) = 200\ \Omega$

$R_{eq} = 100\ \Omega$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{R'_{eq}} = 1\ A$$

4 - Diviseurs de tension et de courant :

a - Diviseur de tension : Le pont diviseur de tension est un montage électrique simple. Il permet de déterminer une tension proportionnellement à une autre tension. ce type de montage est utiliser couramment créer un tension de référence dans un circuit électrique.

La plupart du temps, la représentation du diviseur de tension consiste à placer 2 résistances électrique en série. il est possible de calculer facilement de

calculer la valeur de V_A à condition de connaître les valeurs de résistances et de la tension V_{cc}.

La loi d'OHM permet d'écrire l'équation : $I = \frac{V_{cc}}{R_1 + R_2}$ et $V_A = R_2 I$

Dans cette dernière formule il suffit de remplacer le courant I par sa valeur équivalente dans la première équation pour avoir $V_A = \frac{R_2 V_{cc}}{R_1 + R_2}$

b - Diviseur de courant, est un montage qui permet d'obtenir un courant d'une valeur proportionnelle à un autre courant, son principe ressemble à celui d'un diviseur de tension.

lorsqu'on a deux resistances en parallèle soumise à la même tension V_{cc} il est possible de calculer le courant qui parcours une des deux résistance. pour cette raison on doit connaître le courant totale I qui circule dans cette résistance.

On a alors : $U = I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

de même on a : $U = I_1 R_1$ donc $R_1 I_1 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

par la suite : $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$

II - Applications de l'étude des réseaux :

1 - Méthode des courants de Maxwell :

cette méthode consiste à faire un changement de variable ce qui permet parfois de simplifier la résolution de l'équation de Kirchhoff.

En effet, on dispose d'un réseau constitué de n branches. on cherche à calculer n courants. - On suppose que les mailles constituent des circuit indépendant parcourue par des courants fictifs (imaginaire) qu'on appelle courant des mailles ou courant de maxwell.

- On écrit les lois des mailles des courant réelle I_k qui sont la somme algébrique des courant des mailles.

- On écrit les équations des mailles en remplaçant les courants réelles I_k par les courant fictifs, ceci nous donne un système d'équation dont

mehdi

$$\Delta_{i1} = \begin{vmatrix} E_2 & -R_2 \\ -E_1 & (R_1+R_2) \end{vmatrix} \qquad \Delta_{i2} = \begin{vmatrix} R_3+R_2 & E_2 \\ -R_2 & -E_1 \end{vmatrix}$$

Application numérique.

$R_1 = 10\,\Omega$ $R_3 = 5\,\Omega$ $E_2 = 10V$

$R_2 = 10\,\Omega$ $E_1 = 40V$

$i_1 = -1A$ et $i_2 = \frac{-5}{2}A$

2. Théorème de Millman

cette méthode est une forme particulière de la loi exprimé en terme de potentiel

Considérant le circuit suivant :

Pour chacune des branches nous pouvons écrire

$$\begin{cases} V_1 - V_0 = R_1 i_1 \\ V_2 - V_0 = R_2 i_2 \\ V_3 - V_0 = R_3 i_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{V_1 - V_0}{R_1} \\ i_2 = \frac{V_2 - V_0}{R_2} \\ i_3 = \end{cases}$$

En faisant la somme de ces relations on obtient :

$$i_1 + i_2 + i_3 = \frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} + \frac{V_3 - V_0}{R_3}$$

Or nous avons $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

donc $V_0\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}$

d'où :

$$V_0 = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

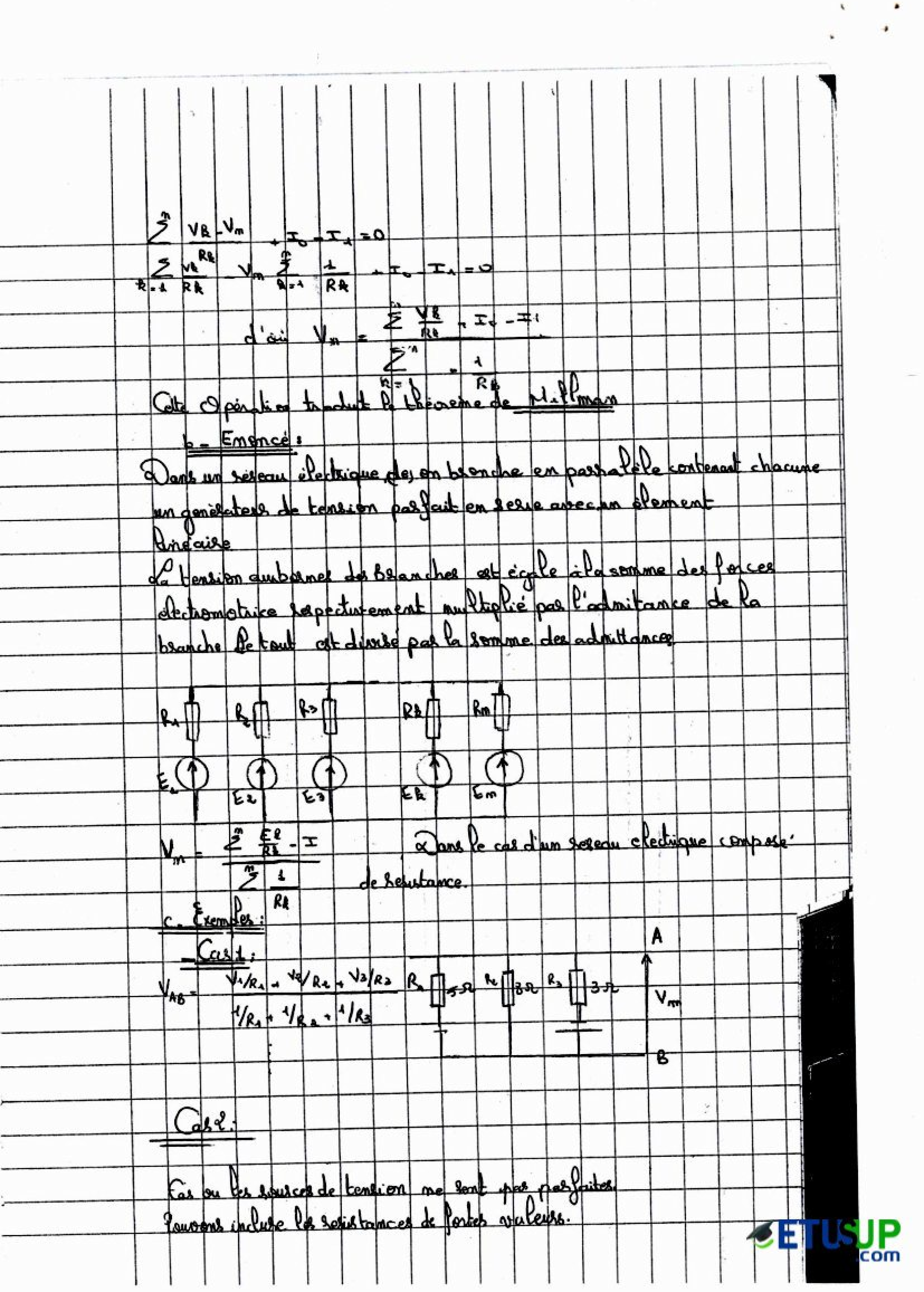
Considérons maintenant le circuit suivant :

Loi des noeuds au point N donc

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_m + I_0 - I_1 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{m} i_k + I_0 - I_1 = 0$$





$$\sum^{n} \frac{V_k - V_m}{R_k} + I_0 - I_1 = 0$$

$$\sum_{k=1} \frac{V_k}{R_k} - V_m \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} + I_0 - I_1 = 0$$

d'où
$$V_m = \frac{\sum \frac{V_k}{R_k} + I_0 - I_1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$$

Cette Opération traduit le théorème de Millman

b. Enoncé :

Dans un réseau électrique de n branche en parallèle contenant chacune un générateur de tension parfait en serie avec un élement linéaire

La tension aux bornes des branches est égale à la somme des forces électromotrice respectivement multiplié par l'admitance de la branche le tout est divisé par la somme des admittances.

$$V_m = \frac{\sum^{n} \frac{E_k}{R_k} - I}{\sum^{n} \frac{1}{R_k}}$$

Dans le cas d'un réseau électrique composé de résistance.

c. Exemples :

Cas 1 :

$$V_{AB} = \frac{V_1/R_1 + V_2/R_2 + V_3/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}$$

Cas 2 :

Cas où les sources de tension ne sont pas parfaites.

Pouvons inclure les résistances de fortes valeurs.

V1 V2 V

$$V = \frac{V_1/R_1 + V_2/R_3}{1/R_1 + 1/R_3} = \frac{E_1/(R_1+R_2) + E_2/(R_3+R_4)}{1/(R_1+R_2) + 1/(R_3+R_4)}$$

Ou encore: U r R E

Soit immédiatement :

$$U = \frac{E/R + 0/r}{1/r + 1/R}$$

Où : $U = \frac{Er}{r+R}$

Cas 3. Diviseur de tension:

E

Théorème de Superpositions.

Les équations sont linéaires en I et V, elles peuvent donc obéir au principe de superposition

Énoncé: Dans un réseau électrique lorsqu'on superpose plusieurs systèmes de forces électromotrices, l'intensité du courant qui circule dans chaque branche est la somme des intensités dans la branche dû à chacun des systèmes agissant seul.

Considérons deux réseaux, de même géométrie, dont les branches occupant les mêmes positions, possédant les mêmes résistances. ces deux réseaux ne diffèrent que par les valeurs de F.E.M placés dans leurs branches.

Réseau 1: $\begin{cases} \sum I_{ent}^1 = \sum I_{sort}^1 \rightarrow \text{loi des noeuds.} \\ \end{cases}$

Réseau 2 : $\begin{cases} \sum^2 I^2_{ent} = \sum^2 I^2_{sort} \Rightarrow \text{loi des noeuds.} \\ \sum \pm R_i I_i^2 + \sum \pm E_i^2 = 0 \Rightarrow \text{loi des mailles.} \end{cases}$

(1) + (2) : $\begin{cases} \sum (I^1_{ent} + I^2_{ent}) = \sum (I^1_{sort} + I^2_{sort}) \Rightarrow \text{loi des noeuds} \\ \sum \pm R_i (I_i^1 + I_i^2) + \sum \pm (E_i^1 + E_i^2) = 0 \text{ loi des mailles} \end{cases}$

Les équations sont celles d'un réseau qui a la même geométrie (m̂ forme) que les 2 précedents, avec les m̂ resistances, et où les F.E.M dans chaque branche est la somme des F.E.M des cette branche dans les 2 réseaux précedents.

Exemple :

$I = I_1 + I_3 \quad I_1 = \dfrac{E_1}{R_1 + R_2 + R_3}$ et $I_2 = \dfrac{E_2}{R_1 + R_2 + R_3} \Rightarrow I = \dfrac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

Alors $I = I_1 - I_2 = \dfrac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

Théoreme de Thévenin :

s'utilise pour convertir une partie d'un réseau complexe en un dipole plus simple. soit un reseau constitue de generateurs et de resistances et soit $E = V_A - V_B$ la difference de potentiel entre deux points A et B du reseau introduisant entre A et B une resistance r. le théoreme de Thévenin permet de calculer l'intensité I qui circule à travers cette resistance

Enoncé :

Un dipole Actif « AB » et équivalent, vu de ces bornes A et B, a un generateur de tension dont la force electromotrice est la tension à vide (en circuit ouvert).

La resistance interne et la résistance équivalente, vu de deux bornes A et B du dipole, lorsqu'on élimine les forces électromotrices

et F. contre. M en gardant les résistances.

Circuit Générateur + Résistance

$$I = \frac{E_{th}}{r + R_{eq}}$$ avec $E_{th} = V_A - V_B$ en l'absence de I ($I = 0$ circuit ouvert)

R_{eq} : la résistance équivalente du circuit (sans r).

Exemples

Calculer I_e.

Circuit équivalent de Thévenin

$I' = I_e$

1ère étape :

Débranchez la résistance R_e du réseau pour faire apparaître le dipôle actif entre « AB ». notre objectif est de trouver le schéma équivalent de Thévenin de ce dipôle



2ème étape

déterminez les paramètres E_{th}, R_{th}.

_ Calcul de E_{th}.

$E_{th} = V_A - V_B$ quand $I_2 = 0$ (circuit ouvert)

$E_{th} = (V_A - V_C) + (V_C - V_B)$

$= -E_2 + R_3 i$

Or : $-R_1 i - E_1 - R_3 i + E_2 = 0$

$$\Rightarrow i = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_3}$$

D'où : $E_{th} = -E_2 + \frac{R_3(E_2 - E_1)}{R_1 + R_3}$

* Calcul de R_{th} :

On court circuite les générateurs.

$R_{th} = R_3 \parallel R_1$

$$R_{th} = \frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1}$$

A

R_3 R_1 R_2 ≡ R_{th} R_2

B

3ème étape :

On branche la résistance R_2 avec le schéma équivalent du dipôle actif AB et ainsi on a simplifier le circuit puisqu'on l'a transformé en une seule maille à l'aide du théorème de thévenin

$$I' = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_2} \Rightarrow I_2 = \frac{-E_{th}}{R_{th} + R_2} = \frac{E_2 - R_3[(E_2 - E_1)/(R_1 + R_3)]}{R_2 + R_{eq}}$$

c_ Théorème de Norton.

Pour les réseaux électriques cette méthode établit que tout circuit linéaire et équivalent à une source de courant idéale I_0, en parallèle avec une résistance R_0. l'intensité I_0 est égale au courant de court circuit, les deux bornes étant reliées par un conducteur parfait. la résistance R_0 est celle du circuit vu des deux bornes

Lorsque toute les sources sont éteinte

Enoncé

Un Dipole actif "AB" est équivalent vu de ces deux bornes A et B, à un generateur de courant dont le courant de Norton et le courant de court circuit de dipole est dans la resistance interne monté en parallèle est la Resistance équivalente de Thevenin

dipôle Actif — A, B ≡ Req, I_{AB}, A, B

Req est definie de la m manière que pour le theoreme de thevenin.

b- Equivalence entre

r_0, E_0, i, A, B — I_0, R_0, A, B

avec $E_0 = R_0 . I_0$

Determinez l'expression du courant i en utilisant le theoreme de Norton.

r_1, e_1, R, i, r_2, e_2, B

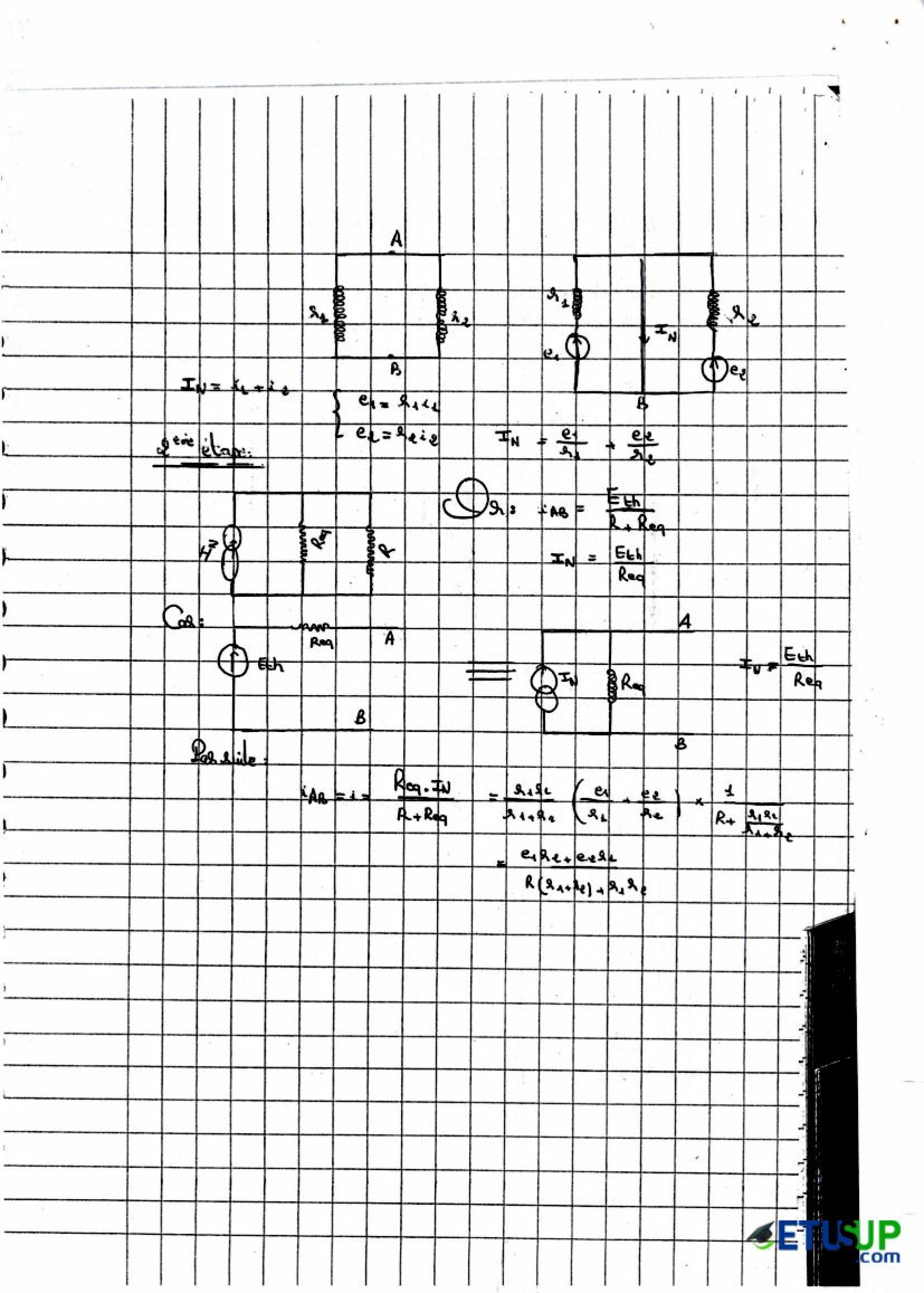
* Circuit de Norton.

I, Req, A, B

1ère étape :

$$R_{eq} = R_{th} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

$(U_{AB} = 0)$.



$I_N = i_1 + i_2$

$$\begin{cases} e_1 = r_1 i_1 \\ e_2 = r_2 i_2 \end{cases}$$

$$I_N = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}$$

2ème étape :

On a : $i_{AB} = \dfrac{E_{th}}{R + R_{eq}}$

$$I_N = \frac{E_{th}}{R_{eq}}$$

Car :

$$I_N = \frac{E_{th}}{R_{eq}}$$

Par suite :

$$i_{AB} = i = \frac{R_{eq} \cdot I_N}{R + R_{eq}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}\right) \times \frac{1}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

$$= \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$$